

**PENJADWALAN PADA MESIN PARALEL IDENTIK UNTUK MEMINIMASI  
MAKESPAN DENGAN MENGGUNAKAN PENDEKATAN *MIXED INTEGER  
LINEAR PROGRAMMING***

**(Studi Kasus pada PT Pertamina Production Unit Gresik – Pelumas)**

***SCHEDULING ON IDENTICAL PARALLEL MACHINES TO MINIMIZE THE  
MAKESPAN USING MIXED INTEGER LINEAR PROGRAMMING APPROACH  
(Case Study on PT Pertamina Production Unit Gresik - Lubricants)***

**Wahyu Rachmad Wildan<sup>1</sup>, Nasir Widha Setyanto<sup>2</sup>, Arif Rahman<sup>3</sup>**

Jurusan Teknik Industri Universitas Brawijaya

Jalan MT. Haryono 167, Malang, 65145, Indonesia

E-mail : [wahyuwildan89@yahoo.co.id](mailto:wahyuwildan89@yahoo.co.id)<sup>1</sup>, [nazzyr\\_lin@ub.ac.id](mailto:nazzyr_lin@ub.ac.id)<sup>2</sup>, [posku@ub.ac.id](mailto:posku@ub.ac.id)<sup>3</sup>

**Abstrak**

*Proses penjadwalan produksi PT Pertamina Production Unit Gresik - Pelumas dilakukan untuk menghasilkan rencana produksi harian. Proses ini tidak saja memerlukan tindak lanjut yang cepat, akan tetapi juga memerlukan langkah-langkah yang sistematis. Penjadwalan yang diterapkan oleh perusahaan dilakukan dengan menggunakan metode trial and error. Penggunaan metode ini mengakibatkan tidak terukurnya waktu penyelesaian pekerjaan maksimum (maximum completion time)/ makespan sehingga pengoptimalisasian utilitas mesin masih belum dapat diupayakan dengan baik. Proses penjadwalan produksi dalam penelitian ini dilakukan dengan menggunakan pendekatan metode Mixed Integer Linear Programming (MILP) dengan tujuan untuk menentukan jadwal produksi yang memiliki makespan yang optimal. Produk yang diamati adalah lima belas produk pelumas kemasan lithos dengan ukuran kemasan 0,8 l dan 1 l yang diproduksi di lintasan pengisian FL-01 dan FL-02. Kedua mesin adalah paralel identik. Penelitian ini dimulai dengan menentukan variabel input dan output, serta parameter ukur yang berupa waktu proses untuk tiap produk, waktu setup antarproduk, waktu kerja lintasan maksimum, variabel keputusan penjadwalan, serta waktu penyelesaian produk di masing-masing lintasan. Formulasi matematis dari model MILP yang dibuat terdiri dari tiga parameter ukur, dua variabel keputusan, tujuh fungsi kendala, dan satu fungsi tujuan. Kemudian dilakukan pengembangan model MILP yang selanjutnya diselesaikan secara komputasi dengan menggunakan software LINGO 14.0. Hasil penyelesaian secara komputasi dari penjadwalan yang dilakukan di PT Pertamina Production Unit Gresik – Pelumas dihasilkan urutan pengerjaan produk yang optimal untuk masing-masing lintasan dengan nilai makespan sebesar 453,5 jam dan nilai utilitas lintasan sebesar 0,91.*

**Kata Kunci:** *Penjadwalan Produksi, Mesin Paralel Identik, Makespan, MILP.*

**1. Pendahuluan**

Dalam usaha untuk memenuhi pesanan konsumennya, perusahaan harus melakukan suatu sistem perencanaan produksi, dimana salah satu kegiatannya adalah penjadwalan produksi. Penjadwalan produksi adalah salah satu hal yang penting dalam perusahaan, khususnya yang berbasis pada industri manufaktur yang di dalamnya terdapat pengolahan bahan baku menjadi barang jadi, dengan menggunakan berbagai macam sumber dan fasilitas yang dimiliki perusahaan.

Secara umum, penjadwalan adalah proses mengoordinasi, memilih, serta menentukan waktu penggunaan fasilitas dan sumber daya untuk menangani segala aktivitas yang dibutuhkan dalam memproduksi produk yang diinginkan, sesuai waktu yang dijadwalkan

serta dengan segala batasan yang ada yang berhubungan dengan banyaknya aktivitas, sumber daya, dan fasilitas (Morton dan Pentico, 1993). Penjadwalan produksi adalah metode yang dibuat untuk menyelesaikan permasalahan yang berhubungan dengan pertanyaan-pertanyaan, seperti apa produk yang akan diproduksi, berapa banyak produk tersebut diproduksi, serta bagaimana alokasi sumber daya yang dimiliki untuk melakukan tugas-tugas yang dibutuhkan dalam proses produksi (Baker, 1974).

Tujuan dilakukannya penjadwalan seperti dikutip dari Bedworth dan Bailey (1987), dimana di dalamnya ada identifikasi beberapa tujuan dari aktivitas penjadwalan adalah sebagai berikut:

1. Meningkatkan penggunaan sumber daya atau mengurangi waktu tunggu, sehingga total waktu proses dapat berkurang, dan produktivitasnya dapat meningkat. Untuk sejumlah pekerjaan diketahui bahwa maksimasi penggunaan sumber daya berbanding terbalik dengan waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan seluruh pekerjaannya (*makespan*). Dengan demikian sasaran penjadwalan yang utama adalah menekan waktu penyelesaian produk secara keseluruhan (minimasi *makespan*).
2. Mengurangi persediaan barang dalam proses (*walk in process product*) atau mengurangi sejumlah pekerjaan yang menunggu dalam antrian ketika sumber daya yang ada masih mengerjakan tugas yang lain. Indikator jumlah pekerjaan yang menunggu dalam antrian di sini dinyatakan dengan nilai waktu alir rata-rata (MFT).
3. Mengurangi beberapa kelambatan pada pekerjaan yang mempunyai batas waktu penyelesaian sehingga akan meminimasi *penalty cost* (biaya kelambatan). Terdapat berbagai macam tujuan berkaitan dengan kelambatan ini. Tujuan penjadwalan dapat berupa minimasi kelambatan/keterlambatan maksimum, minimasi jumlah pekerjaan yang terlambat, atau minimasi kelambatan/kelambatan rata-rata.
4. Membantu pengambilan keputusan mengenai kapasitas pabrik dan jenis kapasitas yang dibutuhkan sehingga penambahan biaya yang mahal dapat dihindarkan.

Di sisi lain, kompleksitas penjadwalan produksi tergantung pada kriteria performansi penjadwalan yang ditentukan. Menurut T'kindt dan Billaut (2002) problem penjadwalan memiliki dua jenis kriteria, yaitu *minimax* (minimasi nilai maksimum suatu fungsi) dan *minisum* (minimasi suatu fungsi penjumlahan). Untuk kriteria *minimax* sendiri dapat dibagi menjadi beberapa kriteria performansi, misalnya *makespan*, *maximum flow time*, *maximum idle time*, *maximum lateness*, *maximum tardiness*, dan/atau *maximum earliness* yang diijinkan.

Selain berdasarkan kriteria performansi yang digunakan, tingkat kompleksitas penjadwalan juga berbeda berdasarkan banyaknya produk dan mesin yang tersedia, serta *routing* dari masing-masing produk

tersebut, yang biasanya digambarkan sebagai penjadwalan  $n$ -produk  $m$ -mesin, yang merupakan suatu proses menentukan urutan produk yang harus dikerjakan di mesin-mesin yang ada. Masing-masing produk memiliki beberapa operasi yang berurutan dimana masing-masing operasi diproses di mesin yang berbeda. Apabila urutan mesin yang digunakan (*routing*) sama antara produk yang satu dengan yang lain, maka kondisi *shop* yang dipertimbangkan dikategorikan sebagai *flowshop*. Sedangkan bila *routing*-nya berbeda maka dikategorikan sebagai *jobshop*.

Sehubungan dengan penjelasan di atas, saat ini cukup banyak minat yang ditujukan pada permasalahan perusahaan yang menghasilkan banyak varian produk (*multi-product*). Sistem produksi yang dapat digunakan oleh perusahaan *multi-product* salah satunya adalah sistem produksi *batch* (Nurhikmawan, 2008). Sistem produksi dengan menggunakan metode *batch* melibatkan jumlah produk yang kecil dengan varian produk akhir yang tinggi, dimana tipe tersebut sesuai untuk produksi dengan volume produksi kecil dan produk dengan tipe *high-value-added*. (Omar dan Teo, 2007).

Terdapat beberapa hal yang digunakan sebagai variabel dasar dari permasalahan penjadwalan produksi adalah sebagai berikut (Baker, 1974):

1. Catatan *job* yang harus dikerjakan pada tiap operasi yang dibutuhkan untuk memproduksi suatu *order* dari konsumen
2. Lamanya waktu operasi yang dibutuhkan tiap operasi yang dilakukan
3. Catatan adanya kegiatan pendahulu yang menjadi batasan untuk melakukan kegiatan selanjutnya.
4. Jika ada sumber daya yang dijadwalkan pada waktu yang sama, perencana produksi harus mengetahui semua sumber daya yang diperlukan untuk tiap pekerjaan (*job*) dan tiap operasi.

Sedangkan untuk memastikan bahwa suatu aliran kerja yang lancar akan melalui tahap produksi, maka sistem penjadwalan harus membentuk aktivitas-aktivitas *output* sebagai berikut.

1. Pembebanan (*loading*)

Pembebanan melibatkan penyesuaian kebutuhan kapasitas untuk pesanan-pesanan yang diterima. Pembebanan dilakukan dengan menugaskan pesanan-pesanan pada

- fasilitas-fasilitas, operator-operator, dan peralatan tertentu.
2. Pengurutan (*sequencing*)  
Pengurutan ini merupakan penugasan tentang pesanan-pesanan mana yang diprioritaskan untuk diproses dahulu bila suatu fasilitas harus memproses banyak pekerjaan.
  3. Prioritas pekerjaan (*dispatching*)  
*Dispatching* merupakan prioritas kerja tentang pekerjaan-pekerjaan mana yang diseleksi dan diprioritaskan untuk diproses.
  4. Pengendalian kinerja penjadwalan  
Pengendalian kinerja penjadwalan dapat dilakukan dengan cara meninjau kembali status pesanan-pesanan pada saat melalui sistem tertentu. Pengendalian ini dapat berupa pengaturan kembali urutan-urutan pekerjaan dikarenakan hal-hal tertentu.
  5. *Updating* jadwal  
*Updating* jadwal dilakukan sebagai refleksi kondisi operasi yang terjadi dengan merevisi prioritas-prioritas.

PT Pertamina *Production Unit* Gresik – Pelumas (Pertamina Pelumas Gresik) merupakan salah satu unit produksi yang berada di bawah manajemen Direktorat Pemasaran dan Niaga, PT Pertamina (Persero). Pertamina Pelumas Gresik bergerak dalam bidang produksi minyak pelumas mesin maupun kendaraan bermotor. Ditinjau dari jenis operasinya, perusahaan ini merupakan perusahaan manufaktur yang beroperasi dengan sistem *Make to Stock* (MTS) yang memproduksi berbagai jenis produk minyak pelumas yang berbeda, baik dari segi komposisi bahan penyusun maupun ukuran/volumenya. Berbagai jenis produk minyak pelumas ini diproduksi dalam sejumlah lintasan produksi dengan *routing* yang sama. Dengan sistem seperti ini, keputusan-keputusan yang harus diambil oleh pihak perusahaan adalah berapa jumlah yang harus diproduksi dalam setiap *batch*-nya, beserta urutan produksi yang menjelaskan mengenai produk manakah yang harus diproses terlebih dahulu.

Pertamina Pelumas Gresik melakukan produksi berdasarkan program bulanan yang telah ditentukan oleh Departemen *Supply Chain* PT Pertamina (Persero). Program bulanan tersebut mencerminkan permintaan untuk tiap-tiap depot yang harus dipenuhi dengan mempertimbangkan persediaan dari Gudang Nusantara. Program bulanan ini selanjutnya

akan didisagregasi oleh Pertamina Pelumas menjadi rencana produksi harian selama maksimal tiga puluh hari untuk masing-masing jenis produk. Rencana produksi harian ini merupakan bentuk penjadwalan pekerjaan pada masing-masing lintasan produksi yang tersedia.

Proses penjadwalan produksi yang dilakukan oleh Pertamina Pelumas Gresik saat ini masih dilakukan dengan metode *trial and error*. Penjadwalan produksi dilakukan di Departemen *Lube Oil Blending Plant* (LOBP) pada dua pasang mesin pengisian (*filling machine*) FL-01 dan FL-02 serta FL-03 dan FL-04 yang masing-masing pasang adalah paralel identik, dimana lintasan FL-01 dan FL-02 menghasilkan produk pelumas dengan ukuran kemasan 0,8 l dan 1 l dan lintasan FL-03 dan FL-04 menghasilkan produk pelumas dengan ukuran 4 l, 5 l, dan 10 l. Penjadwalan dilakukan dengan mempertimbangkan batasan-batasan berupa kapasitas produksi, kapasitas tangki penyimpanan sementara (*Holding Tank/ TH*), waktu *setup* antarproduk, waktu *setup* antargrup-produk, dan *setting* mesin pada periode produksi sebelumnya.

Dengan batasan yang ada, penggunaan metode *trial and error* dalam penjadwalan produksi ini mengakibatkan belum optimalnya pelaksanaan proses produksi di Pertamina Pelumas Gresik. Selain itu, penggunaan metode *trial and error* ini akan berimplikasi langsung pada ketersediaan waktu produksi. Dengan waktu *setup* yang tinggi, semakin besar frekuensi dilakukannya *setup*, maka semakin besar pula berkurangnya waktu produksi yang tersedia. Sehingga, dapat dikatakan bahwa penggunaan metode *trial and error* ini mengakibatkan frekuensi *setup* yang diharapkan bisa ditekan seminimal mungkin menjadi sulit untuk diukur dan dioptimalkan.

Data yang didapatkan dari Pertamina Pelumas Gresik menunjukkan bahwa proses *setup* antargrup-produk di-breakdown ke dalam dua aktivitas, yaitu penggantian *part* mesin serta *flusing*. *Flusing* merupakan proses pembersihan jaringan pipa yang menghubungkan antara tangki penyimpanan sementara dengan mesin *filling*. Proses *setup* ini membutuhkan total waktu sebesar 150 menit (2,5 jam) dengan rincian waktu penggantian *part* mesin membutuhkan waktu 120 menit (2 jam) dan waktu yang diperlukan untuk proses *flusing* sebesar 30 menit. Proses *setup* ini mengakibatkan dua shift mesin pertama pasca-

*setup* akan berjalan dengan kecepatan 50 persen dari kecepatan normal. Jika keseluruhan proses ini diekuivalensikan dengan waktu, maka dapat dikatakan bahwa proses *setup* membutuhkan waktu selama 8 – 10,5 jam (setara dengan waktu kerja mesin selama satu shift).

Selain itu, penggunaan metode *trial and error* ini mengakibatkan tidak terukurnya nilai dari kriteria performansi penjadwalan, seperti waktu penyelesaian maksimum dari seluruh pekerjaan/ *maximum completion time (makespan)* dari proses produksi. Telah diketahui, bahwa waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan seluruh pekerjaan berbanding terbalik dengan maksimasi utilisasi sumber daya. Artinya, semakin rendah waktu penyelesaian seluruh pekerjaan, maka semakin tinggi tingkat utilisasi sumber dayanya. Sehingga, dengan tidak optimalnya nilai *makespan*, pengoptimalisasian utilisasi mesin dan kapasitas produksi belum dapat diupayakan dengan baik.

Bagi Pertamina Pelumas Gresik, proses penjadwalan produksi untuk menghasilkan rencana produksi harian tidak saja memerlukan tindak lanjut yang sangat cepat, mengingat bahwa rencana produksi harian harus bisa dilaksanakan secepatnya setelah program bulanan diterima, akan tetapi juga memerlukan langkah-langkah sistematis dan juga mempertimbangkan berbagai batasan-batasan (*constraint*) yang ada untuk menghasilkan penjadwalan produksi yang benar-benar optimal.

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah metode *linear programming*. *Linear programming* merupakan teknik dalam manajemen sains yang digunakan untuk menentukan cara optimal untuk mencapai tujuan, disesuaikan dengan batasan, dan berada dalam kasus di mana semua hubungan matematis adalah *linear*. Model *linear programming* terdiri dari hubungan *linear* yang mewakili keputusan perusahaan dengan mempertimbangkan tujuan dan batasan sumber daya. Jika metode *linear programming* menghasilkan variabel keputusan dimana sebagian berupa bilangan bulat dan sebagian bilangan pecahan, maka metode tersebut dinamakan *mixed integer linear programming*. Oleh karena itu, dalam penelitian ini metode penjadwalan yang akan diterapkan adalah dengan menggunakan pendekatan *mixed integer*

*linear programming*, dimana produk yang akan diamati adalah produk pelumas kemasan lithos dengan ukuran kemasan 0,8 l dan 1 l yang di produksi di lintasan FL-01 dan FL-02.

## 2. Metode Penelitian

Metodologi penelitian ini berisi tahapan-tahapan sistematis yang digunakan sebagai dalam melakukan penelitian. Tahapan-tahapan tersebut merupakan suatu kerangka berfikir yang dijadikan sebagai acuan agar proses penelitian berjalan secara sistematis, terstruktur, dan terarah, serta dijadikan pedoman penelitian untuk mencapai tujuan yang telah ditetapkan sebelumnya. Adapun tahap-tahap metode penelitian adalah identifikasi dan perumusan masalah, penetapan tujuan penelitian, studi pustaka dan survei pendahuluan, pengumpulan dan pengolahan data, analisis dan pembahasan, serta penarikan kesimpulan. Metode penelitian ini merupakan penelitian deskriptif dimana dalam penelitian ini dideskripsikan setiap variabel yang mempengaruhi masalah yang ada secara sistematis dan aktual berdasarkan data yang ada. Kemudian diberikan penjelasan yang objektif dan evaluasi sebagai bahan pengambilan keputusan dari permasalahan yang dihadapi. yang meliputi beberapa langkah. Langkah-langkah penelitian ini adalah sebagai berikut:

### 1. Studi Lapangan (*Field Research*)

Untuk dapat menggambarkan apa yang perlu dilakukan dalam penelitian, maka terlebih dahulu dibutuhkan suatu proses yang dinamakan dengan studi lapangan yang akan dibandingkan dengan dasar dalam studi pustaka. Metode ini digunakan dalam pengumpulan data yang dilakukan secara langsung ke tempat penelitian. Survei pendahuluan digunakan sebagai tahapan sebelum pembuatan model penjadwalan produksi. Survei pendahuluan ini dilakukan dengan tujuan memahami kondisi aktual yang terjadi di perusahaan yang akan diteliti. Survei ini dapat dilakukan dengan *brainstorming* atau wawancara dengan sumber yang mengerti mengenai permasalahan produksi yang ada di perusahaan. Studi lapangan dapat dilakukan dengan beberapa cara, antara lain:

#### a. Wawancara

Wawancara digunakan untuk mengidentifikasi sistem organisasi dan variabel-variabel masukan dan keluaran.



a. Observasi

Pada survei pendahuluan ini dilakukan pengumpulan data dan informasi mengenai variabel-variabel penjadwalan yang ada pada PT Pertamina Pelumas Gresik.

d. Dokumentasi

Dokumentasi merupakan cara pengumpulan data dengan menyalin data-data perusahaan berupa laporan, catatan, atau arsip yang sudah ada.

2. Studi Literatur (*Library Research*)

Studi literatur merupakan suatu metode untuk mendapatkan data dengan mempelajari literatur di perpustakaan serta membaca sumber-sumber data informasi lainnya yang berhubungan dengan pembahasan. Studi pustaka adalah dasar (acuan) yang dipakai dalam penelitian. Harus terdapat studi literatur (pustaka) dikarenakan adanya suatu dasar yang digunakan sebagai pedoman dalam menyelesaikan masalah dan mencapai tujuan penelitian. Dengan adanya studi pustaka ini, maka diharapkan dapat menjadi pembanding antara apa yang terjadi di dunia nyata dan sebagai penuntun langkah-langkah atas tindakan yang akan diambil dalam penelitian ini. Pustaka yang digunakan dapat diambil dari buku-buku teks dan jurnal yang dapat dijadikan sebagai referensi dari penelitian.

3. Identifikasi dan Perumusan Masalah

Tahapan awal dalam penelitian yang akan dilakukan adalah mengidentifikasi permasalahan yang akan dijawab pada penelitian ini. Permasalahan yang akan diteliti dan akan dijadikan bahasan adalah bagaimana melakukan penjadwalan produksi pada mesin paralel identik untuk meminimasi *makespan* dengan menggunakan pendekatan *mixed integer linear programming*.

4. Penetapan Tujuan Penelitian

Tahap ini merupakan tahap yang penting dimana dengan adanya tujuan penelitian diharapkan dapat membantu peneliti untuk dapat lebih fokus terhadap penelitian yang dilakukan.

5. Identifikasi Variabel Input dan Output

Sebelum membuat model penjadwalan produksi yang optimal, maka diperlukan pemahaman terlebih dahulu mengenai semua *input* yang dibutuhkan dalam penjadwalan produksi. Pada tahapan ini

dilakukan identifikasi *input* model, parameter dalam model, proses maupun *output* yang akan dicapai dari pembuatan model. Data-data tersebut didapatkan dari perusahaan dan informasi dari sumber-sumber yang ada.

6. Pengumpulan Data

Data-data yang diperlukan untuk digunakan sebagai penelitian ini adalah sebagai berikut: gambaran umum perusahaan, data proses produksi, data program produksi bulanan, grup produk, data kapasitas serta kecepatan lintasan yang digunakan, data waktu kerja per bulan penjadwalan, dan data waktu *setup* antargrup. Dalam tahap ini juga diidentifikasi *input* yang akan digunakan dalam model MILP. Tabel 1 menunjukkan program produksi pelumas kemasan lithos pada bulan Desember 2012.

**Tabel 1.** Program Produksi Pelumas Kemasan Lithos Bulan Desember 2012

GRUP (KEMASAN)	NO	NAMA PRODUK	PROGRAM DESEMBER 2012
20 x 1 l	1	ENDURO 4T Min 20W-50 JASO MA	310
	2	MEDITRAN S 40	10.360
	3	MEDITRAN SC Min 15W-40 CF4	530
	4	MEDITRAN SX Min 15W-40 CH4	250
	5	MESRAN 40	21.490
	6	MESRAN B 40	5.930
	7	MESRAN SUPER 20W/50	30.850
	8	MESRANIA 2T OB	1.980
	9	MESRANIA 2T SPORT TCA	0
	10	MESRANIA 2T SUPER	13.560
	11	MESRANIA 2T SUPER X	0
	12	PRIMA XP 20W/50	17.410
		<b>Total</b>	<b>102.670</b>
24 x 0.8 l	13	ENDURO 4T Min 20W-50 JASO MA	5.610
	14	ENVIRO 2T Min 20 JASO FC	340
	15	MESRAN SUPER 20W/50	11.190
		<b>Total</b>	<b>17.140</b>
		<b>TOTAL PRODUKSI</b>	<b>223.610</b>

Tabel 2 menunjukkan data lintasan dan kecepatan lintasan untuk lintasan FL-01 sedangkan Tabel 3 menunjukkan data lintasan dan kecepatan lintasan untuk FL-02.

**Tabel 2.** Data Lintasan dan Kecepatan Lintasan untuk Lintasan FL-01

LINTASAN	GRUP (KEMASAN)	KECEPATAN LINTASAN
		(dos/jam)
LINTASAN FL-01	20 X 1 LTR	138
	24 X 0.8 LTR	113
	<b>TOTAL</b>	<b>251</b>

**Tabel 3.** Data Lintasan dan Kecepatan Lintasan untuk Lintasan FL-01

LINTASAN	GRUP (KEMASAN)	KECEPATAN LINTASAN
		(dos/jam)
LINTASAN FL-02	20 X 1 LTR	138
	24 X 0.8 LTR	113
	<b>TOTAL</b>	<b>251</b>

Tabel 4 menunjukkan data waktu kerja yang tersedia selama periode amatan.

**Tabel 4.** Data Lintasan dan Kecepatan  
Lintasan untuk Lintasan FL-02

Bulan	Lama Jam Kerja per Shift (jam)	Jumlah Shift Kerja per Hari (shift)	Jumlah Hari Tersedia (hari)	Total Jam Kerja Tersedia (jam)
Desember 2012	8	2	31	496

### 7. Penghitungan Waktu Proses untuk Masing-masing Produk

Perhitungan waktu proses untuk masing-masing produk dapat dilakukan dengan rumus:

$$P_j = \frac{S_j}{C_{jg}} \quad (\text{pers. 1})$$

Keterangan:

$P_j$  = waktu proses untuk produk  $j$  (jam)

$S_j$  = jumlah yang harus diproduksi untuk produk  $j$  (dos)

$C_{jg}$  = kecepatan lintasan produksi untuk produk  $j$  grup  $g$  (dos/jam)

Data hasil rekapitulasi perhitungan waktu proses untuk masing-masing produk dapat ditunjukkan pada Tabel 5.

**Tabel 5.** Data Waktu Proses

No	Uk	Nama Produk	Program Produksi (dos)	Kapasitas Produksi Mesin (dos/jam)	Waktu Proses (jam)
1	IL	ENDURO 4T Min 20W-50 JASO MA	310	138	2.25
2		MEDITRAN S40	10.360		75.07
3		MEDITRAN SC Min 15W-40 CF4	530		3.84
4		MEDITRAN SX Min 15W-40 CH4	250		1.81
5		MESRAN 40	21.490		155.72
6		MESRAN B 40	5.930		42.97
7		MESRAN SUPER 20W/50	30.850		223.55
8		MESRANIA 2T OB	1.980		14.35
9		MESRANIA 2T SPORT TCA	0		0
10		MESRANIA 2T SUPER	13.560		98.26
11		MESRANIA 2T SUPER X	0		0
12		PRIMA XP 20W/50	17.410		126.16
13	0.8L	ENDURO 4T Min 20W-50 JASO MA	5.610	113	49.65
14		ENVIRO 2T Min 20 JASO FC	340		3.01
15		MESRAN SUPER 20W/50	11.190		99.03

### 8. Matriks Waktu Setup Antargrup Produk

Untuk mempermudah dalam proses penulisan *syntax* model *linear programming*, maka disusun matriks waktu *setup* antargrup produk seperti ditunjukkan pada Tabel 6 berikut ini

**Tabel 6.** Tabel Matriks Waktu Setup  
Antargrup Produk

		Produk (j)														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Produk (k)	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2.5	2.5	2.5
	13	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	0	0	0
	14	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	0	0	0
	15	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5	0	0	0

Tabel 6 menjelaskan mengenai hubungan antara produk  $j$  dengan produk  $k$ , dimana produk  $j$  merupakan pendahulu dari produk  $k$ . Nilai yang didapat dari hubungan antarproduk tersebut merupakan nilai dari waktu setup  $S(j,k)$  yang ditentukan jika ada perpindahan jadwal produksi dari produk  $j$  ke produk  $k$ .

### 9. Pengembangan Model

Pada tahap ini akan dilakukan proses pengembangan model dengan menggunakan model *Mixed Integer Linear Programming*. Model yang dikembangkan dalam tahap ini merupakan pengembangan model yang mengacu pada penelitian yang dilakukan oleh Mokotoff (1999).

### 3. Model Mixed Integer Linear Programming

Salah satu metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan ini adalah metode *linear programming*. *Linear programming* merupakan teknik dalam manajemen sains yang digunakan untuk menentukan cara optimal untuk mencapai tujuan, disesuaikan dengan batasan, dan berada dalam kasus di mana semua hubungan matematis adalah *linear*. Model *linear programming* terdiri dari hubungan *linear* yang mewakili keputusan perusahaan dengan mempertimbangkan tujuan dan batasan sumber daya. Jika metode *linear programming* menghasilkan variabel keputusan dimana sebagian berupa bilangan bulat dan sebagian bilangan pecahan, maka metode tersebut dinamakan *mixed integer linear programming*.

Formulasi model *mixed integer linear programming* ini memiliki fungsi tujuan, yaitu untuk meminimasi *makespan* dan memiliki beberapa fungsi kendala. Selain fungsi tujuan dan fungsi kendala, dalam model ini juga

terdapat beberapa parameter dan variabel keputusan yang telah ditentukan. Dengan indeks  $i$  untuk menyatakan lintasan dan  $j, k, h$ , untuk menyatakan produk, maka parameter dan variabel keputusan yang digunakan dalam model ini adalah sebagai berikut.

- $P(j)$  : waktu proses untuk tiap produk- $j$  (jam)  
 $S(j,k)$  : waktu *setup* antara produk- $j$  ke produk- $k$  (jam)  
 $M$  : nilai Big M = 10000  
 $X(i,j,k)$  : Bernilai 1 apabila produk- $j$  dikerjakan sebelum produk- $k$  di lintasan- $i$   
: Bernilai 0, selainnya  
 $C(i,j)$  : Waktu penyelesaian produk- $j$  di lintasan- $i$  (jam)

### 3.1 Fungsi Obyektif Model *Mixed Integer Linear Programming*

Dalam mengerjakan permasalahan penjadwalan terdapat setidaknya satu buah fungsi obyektif (tujuan). Fungsi obyektif dari permasalahan ini adalah meminimumkan maksimum waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan seluruh pekerjaan yang ada dalam program produksi/ makespan. Fungsi obyektif tersebut secara matematis dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$\text{meminimumkan } C_{max} \quad (\text{pers. 2})$$

### 3.1 Fungsi Kendala Model *Mixed Integer Linear Programming*

Sedangkan fungsi kendala yang terdapat pada model ini adalah sejumlah tujuh fungsi kendala. Fungsi kendala ini digunakan untuk memberikan batasan pada model *mixed integer linear programming* dalam menyelesaikan masalah penjadwalan sehingga pada akhirnya akan menghasilkan fungsi tujuan yang optimal. Fungsi kendala yang ada ditentukan sesuai dengan batasan yang ada di lingkup penelitian. Adapun kendala-kendala yang digunakan dapat dijelaskan sebagai berikut.

1. Waktu penyelesaian maksimum ( $C_{max}$ ) merupakan nilai maksimum dari waktu penyelesaian produk terakhir yang dikerjakan pada masing-masing lintasan. Secara matematis dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$C_{max} \geq C(i,k), \quad \forall_k \quad (\text{pers. 3})$$

2. Kendala berikut ini menjelaskan bahwa selisih waktu penyelesaian antara satu produk dengan produk sebelumnya tidak boleh kurang dari jumlah antara waktu proses produk tersebut dengan waktu *setup*-nya. Secara matematis dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$C(i,k) - C(i,j) + M(1 - X(i,j,k)) \geq S(j,k) + P(k), \quad \forall_j, \forall_k, j \neq k, \forall_i \quad (\text{pers. 4})$$

3. Kendala berikut ini digunakan untuk memastikan bahwa hanya satu produk  $j$  yang boleh mendahului secara langsung produk  $k$ . Secara matematis dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$\sum_j \sum_i X(i,j,k) = 1, \quad j \neq k \quad (\text{pers. 5})$$

4. Kendala berikut ini digunakan untuk memastikan bahwa hanya satu produk  $k$  yang dikerjakan secara langsung setelah produk  $j$ . Secara matematis dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$\sum_k \sum_i X(i,j,k) = 1, \quad \forall_j, j \neq k \quad (\text{pers. 6})$$

5. Kendala berikut ini digunakan untuk memastikan bahwa masing-masing produk hanya dikerjakan satu kali di satu lintasan. Secara matematis dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$X(i,j,k) = 0, \quad \forall_j, \forall_k, \forall_i, j = k \quad (\text{pers. 7})$$

6. Kendala berikut ini digunakan untuk memastikan bahwa masing-masing produk hanya dikerjakan di satu lintasan. Secara matematis dapat diformulasikan sebagai berikut.

$$X(1,j,k) + X(2,h,j) \leq 1, \quad \forall_j, \forall_k, \forall_h, j \neq k \neq h \quad (\text{pers. 8})$$

$$X(1,j,k) + X(2,k,h) \leq 1, \quad \forall_j, \forall_k, \forall_h, j \neq k \neq h \quad (\text{pers. 9})$$

## 4. Hasil dan Pembahasan

Tahap ini akan menyajikan pengolahan data-data yang didapatkan dari perusahaan, seperti ditunjukkan pada pengumpulan data di

atas. Tahap ini berisi tentang pengolahan data dengan menggunakan model MILP yang telah dikembangkan pada tahap sebelumnya, meliputi parameterisasi dan formulasi model *Mixed Integer Linear Programming*. Formulasi model dan perhitungan hasil optimal dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* LINGO 14.0.

Setelah itu akan dijelaskan mengenai analisis dan pembahasan dari hasil pengumpulan dan pengolahan data yang nantinya akan digunakan sebagai dasar untuk membuat suatu kesimpulan dan rekomendasi bagi perusahaan.

#### 4.1 Parameterisasi Model *Mixed Integer Linear Programming*

Parameterisasi model ini dilakukan untuk menentukan nilai pada parameter-parameter yang ada dalam model. Untuk parameter produk  $P(j)$  yang menyatakan waktu proses untuk tiap produk- $j$ , nilai parameter untuk masing-masing indeksya ditunjukkan dalam Tabel 3, dimana sesuai dengan data yang ada, indeks  $j = 1, 2, 3, \dots, 13, 14, 15$ .

**Tabel 7.** Nilai Parameter  $P(j)$  untuk Masing-masing Indeks

INDEKS	NILAI
$j$	
1	2.25
2	75.07
3	3.84
4	1.81
5	155.72
6	42.97
7	223.55
8	14.35
9	0.00
10	98.26
11	49.65
12	3.01
13	99.03
14	42.97
15	223.55

Untuk parameter  $S(j,k)$  yang menyatakan waktu *setup* antara produk- $j$  ke produk- $k$ , nilai parameter untuk masing-masing indeksya ditunjukkan pada Tabel 2, dimana sesuai dengan data yang ada pada subbab pengambilan data, indeks  $j,k = 1,1; 1,2, \dots, 15,14; 15,15$ .

Sementara untuk parameter  $M$  yang menyatakan nilai Big M, nilai yang ditentukan adalah sebesar 10.000.

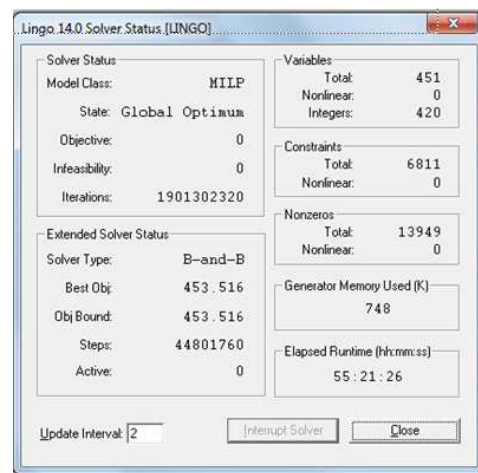
#### 4.2 Formulasi Model *Mixed Integer Linear Programming*

Formulasi model MILP yang dituliskan dalam *syntax* pemrograman pada *software*

LINGO 14.0 selanjutnya dapat dilihat pada Lampiran 1.

#### 4.3 Solusi dan Analisis Model *Mixed Integer Linear Programming*

Permasalahan penjadwalan produksi pada proses pengisian (*filling*) pelumas dengan kemasan lithos ukuran 0,8 l dan 1 l di lintasan FL 01 dan FL 02 diselesaikan secara komputasi dengan menggunakan bantuan *software* LINGO 14.0 (unlimited). Dalam proses komputasi, semua data, fungsi objektif, dan fungsi kendala pada model matematis *mixed integer linear programming* diubah menjadi *syntax* program sesuai dengan bahasa pemrograman dari LINGO 14.0. Hasil *output* dari LINGO 14.0 dapat dilihat pada Lampiran 2.



**Gambar 1.** LINGO 14.0 Solver Status

Dari Gambar 4.10 dapat ditunjukkan total variabel yang ada pada model sebesar 451 variabel dengan 420 variabel di antaranya adalah variabel *integer*, total *constraints*/ batasan yang dijabarkan dari model sebesar 6811 batasan, dan total *nonzeros coefficient* dalam model sebesar 13949 koefisien. Dengan jumlah variabel, batasan, dan koefisien tersebut, didapatkan solusi dari LINGO 14.0 untuk model *mixed integer linear programming* yang berupa nilai fungsi objektif untuk meminimasi maksimum waktu pengerjaan keseluruhan produk (*maximum completion time/ makespan*) dengan total iterasi sebesar 1.901.302.320 iterasi. Dengan itu, nilai *completion time/ makespan* dari permasalahan yang dibahas dalam penelitian ini untuk proses penjadwalan produksi pengisian pelumas didapat sebesar 453,52 jam atau ekuivalen dengan 28,35 hari kerja.

Waktu yang dibutuhkan dalam proses komputasi untuk model yang dikerjakan adalah sebesar lima puluh lima (55) jam, dua puluh satu (21) menit, dan dua puluh enam (26) detik dengan



menggunakan komputer *Intel® Core™ 2 Duo T6600 2,2 GHz* dengan *RAM 4 GB*.

Dari hasil komputasi untuk model *mixed integer linear programming*, selain nilai *makespan* juga didapatkan urutan penjadwalan proses pengisian pelumas untuk masing-masing lintasan produksi. Urutan penjadwalan proses pengisian pelumas untuk masing-masing lintasan produksi dapat ditunjukkan pada Tabel 8 berikut ini.

**Tabel 8.** Urutan Penjadwalan Tiap Produk Pelumas di Masing-masing Lintasan

URUTAN	LINTASAN PRODUKSI	
	FL 01	FL 02
1	7	5
2	10	12
3	2	15
4	6	13
5	3	8
6	14	1
7	4	-

Dari Tabel 4.8 dapat diketahui bahwa urutan penjadwalan proses pengisian pelumas pada mesin FL 01 dimulai dari produk Mesran Super 20W/50, kemudian secara berurutan Mesrania 2T Super, Meditrans S40, Mesran B40, Meditrans SC Min 15W-40 CF4, Enviro 2T Min 20 JASO FC, dan Meditrans SX Min 15W-40CH4. Sedangkan urutan penjadwalan proses pengisian pelumas pada mesin FL 02 dimulai dari produk Mesran 40, kemudian secara berurutan Prima XP 20W/50, Mesran Super 20W/50, Enduro 4T Min 20W-50 JASO MA, Mesrania 2T OB, dan Enduro 4T Min 20W-50 JASO MA.

#### 4.4 Nilai Utilitas Lintasan pada Penjadwalan dengan Model *Mixed Integer Linear Programming*

Nilai utilitas lintasan didapatkan dari perbandingan jumlah waktu lintasan yang tersedia dalam suatu periode terhadap nilai *maximum completion time* yang dihasilkan. Nilai utilitas lintasan berkisar antara 0 sampai dengan 1. Dari data yang ada diketahui bahwa jumlah waktu lintasan yang tersedia selama satu bulan adalah sebesar 496 jam. Sedangkan dari hasil *mixed integer linear programming* diketahui bahwa nilai *maximum completion time/ makespan*-nya adalah sebesar 453,52 jam. Sehingga dari pengertian utilitas lintasan tersebut didapatkan nilai utilitas sebesar 0,91.

**Tabel 9.** Nilai Utilitas Lintasan

Nilai <i>Makespan</i> (jam)	Waktu Kerja Tersedia (jam)	Utilitas Lintasan
453,52	496	0,91

Nilai ini menunjukkan bahwa pemanfaatan lintasan dalam satu periode produksi yang disediakan masih belum mencapai 100%. Namun, dengan waktu kerja tersedia sebesar 496 jam, metode penjadwalan menggunakan pendekatan *mixed integer linear programming* sudah menunjukkan hasil yang baik. Walaupun demikian, dari nilai utilitas tersebut, terlihat bahwa dengan menggunakan metode *mixed integer linear programming*, masih ada kapasitas waktu lintasan sebesar 42,28 jam yang dapat digunakan secara optimal untuk memproduksi lebih banyak produk dalam periode yang diamati.

#### 5. Kesimpulan

Berdasarkan hasil pengolahan data dan pembahasan maka dapat dilakukan penarikan beberapa kesimpulan, antara lain sebagai berikut.

1. Dari hasil penjadwalan produksi pelumas pada dua lintasan pengisian FL 01 dan FL 02 yang paralel identik dengan menggunakan metode *mixed integer linear programming* didapatkan hasil bahwa urutan pengerjaan produk untuk masing-masing lintasan, yaitu produk 7 – 10 – 2 – 6 – 3 – 4 – 14 – 4 untuk lintasan pengisian FL 01 dan produk 5 – 12 – 15 – 13 – 8 – 1 – 9 – 11 untuk lintasan pengisian FL 02. Urutan penjadwalan produksi dengan model ini merupakan urutan penjadwalan yang optimal sehingga bisa didapatkan waktu penyelesaian maksimum yang paling minimal dari semua produk yang dijadwalkan.
2. Nilai *makespan* yang didapatkan berdasarkan penjadwalan dengan metode MILP adalah sebesar 453,5 jam dengan persentase utilitas sebesar 91,39%. Nilai ini menunjukkan bahwa pemanfaatan lintasan dalam satu periode produksi yang disediakan masih belum mencapai 100%. Namun, dengan waktu kerja tersedia sebesar 496 jam, metode penjadwalan menggunakan pendekatan *mixed integer linear programming* sudah menunjukkan hasil yang baik dan terlihat bahwa dengan menggunakan metode *mixed integer linear programming*, masih ada kapasitas waktu lintasan sebesar 42,28 jam yang dapat digunakan secara optimal untuk memproduksi lebih banyak produk dalam periode yang diamati.

**Daftar Pustaka**

- Baker, Kenneth R. (1974). *Introduction to Sequencing and Scheduling*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Makotoff, Ethel (1999). Scheduling to Minimize the Makespan on Identical Parallel Machines: An LP-Based Algorithm. *Investigacion Operativa, Volume 8, No 1,2, dan 3*, Juli-December 1999.
- Morton, Thomas E. dan Pentico, David W. (1993). *Heuristic Scheduling Systems*. New York: John Wiley and Sons, Inc.
- Nurhikmawan, Anggunsatria (2008). *Penjadwalan dan Perencanaan Produksi Multi-Product dengan Metode Hierarchical Production Planning (HPP), pada Sistem Produksi Batch. Studi Kasus Pada Perusahaan PT. Domusindo Perdana*. Skripsi. Surabaya: Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya.
- Omar, M. K. dan Teo, S.C. (2007). Hierarchical Production Planning and Scheduling in a multi-product, batch process. *Environment International Journal of Production Research, Vol. 45, No. 5*, 1 March 2007. 1029 – 1047.
- T'kindt, Vincent dan Billaut, Jean-Charles (2002). *Multicriteria Scheduling: Theory, Models, and Algorithms*. New York: Springer.

**Lampiran 1. Syntax Pemrograman *Mixed Integer Linear Programming* pada LINGO 14**

```
MODEL:
TITLE PENJADWALAN PRODUKSI PERTAMINA PELUMAS GRESIK;

SETS:
lintasan/1..2/;;
job/1..15/:p;
variable1(job,job):S;
variable2(lintasan,job,job):X;
variable3(lintasan,job):C;
ENDSETS

DATA:
!data waktu produksi setiap produk untuk program bulanan;
p=
2.25
75.07
3.84
1.81
155.72
42.97
223.55
14.35
0
98.26
0
126.16
49.65
3.01
99.03;

!matriks waktu setup untuk setiap produk;
s=
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 2.5 2.5 2.5
2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 0 0 0
2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 0 0 0
2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 2.5 0 0 0

ENDDATA

MIN=CMAX;
@for(lintasan(i):@for(job(k):CMAX>=C(i,k)));
@for(job(j):@for(job(k)|j#NE#k:@for(lintasan(i):C(i,k)-C(i,j)+10000*(1-
X(i,j,k))>=(S(j,k)+p(k))));

!untuk memastikan bahwa hanya satu job (j) yang mendahului secara langsung job k;
@for(job(k):@sum(job(j)|j#NE#k:@sum(lintasan(i):X(i,j,k)))=1);
!untuk memastikan bahwa hanya satu job (k) yang dikerjakan secara langsung setelah job j;
@for(job(j):@sum(job(k)|j#NE#k:@sum(lintasan(i):X(i,j,k)))=1);

!job hanya dikerjakan satu kali pada salah satu lintasan;
@for(job(j):@for(job(k)|j#EQ#k:@for(lintasan(i):X(i,j,k)=0)));

!job hanya dikerjakan di salah satu lintasan;
@for(job(j):@for(job(k):@for(job(h)|j#NE#k#NE#h:X(1,j,k)+X(2,h,j)<=1)));
@for(job(j):@for(job(k):@for(job(h)|j#NE#k#NE#h:X(1,j,k)+X(2,k,h)<=1)));

!batasan variabel biner;
@for(variable2(i,j,k):@BIN(X(i,j,k)));

END
```

**Lampiran 2.** *Output Mixed Integer Linear Programming* pada LINGO 14

Optimal solution found.

Objective value:	453.5161
Objective bound:	0.000000
Infeasibilities:	0.000000
Extended solver steps:	44801760
Total solver iterations:	1901302320
Elapsed runtime seconds:	199286.02

Model Class:	MILP
--------------	------

Total variables:	451
Nonlinear variables:	0
Integer variables:	420

Total constraints:	6813
Nonlinear constraints:	0

Total nonzeros:	13979
Nonlinear nonzeros:	0